

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)**Term-End Examination****December, 2007****MATHEMATICS****MTE-3 : MATHEMATICAL METHODS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50*

Note : Question no. 7 is **compulsory**. Do any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculator is **not** allowed.

1. (a) Give one example each, with justification, of a function which is

(i) surjective, not injective;

(ii) bijective.

5

- (b) Given the following data, obtain the arithmetic mean and mode of the wages : 3

Wages (in thousand Rs.)	No. of Persons
6	3
7	6
8	9
9	13
10	8
11	5
12	4

- (c) Find $\frac{dy}{dx}$, when $y = x^2 + \frac{1}{y}$. 2

2. (a) If $u = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, show that

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad 4$$

- (b) If a and b are the roots of the equation $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbf{R}$, then find the equation with roots a^2 and b^2 . 3

- (c) In a single throw of two dice, find the probability of getting at least the sum 8 on the two dice. 3

3. (a) A centre for disease control has determined that when a person is given a vaccine, the probability that she will develop immunity to a virus is 0.8. If eight people are given the vaccine, find the probability that

(i) none will develop immunity;

(ii) exactly four will develop immunity.

4

- (b) Evaluate

3

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3 + 4 \sin x} dx$$

- (c) Find the equation of the plane through the origin, which is parallel to the line

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-2},$$

and passing through the point (0, 0, 1).

3

4. (a) The following data relate to marketing expenditure X (in thousand rupees) and the corresponding sales Y (in ten thousand rupees) :

X	10	12	15	20	14
Y	14	15	20	25	10

Find the coefficient of correlation between the marketing expenditure and the corresponding sales.

6

- (b) Given that a, b, c are in A.P., prove that

$$\frac{a(b+c)}{bc}, \frac{b(c+a)}{ca}, \frac{c(a+b)}{ab} \text{ are also in A.P.}$$

4

5. (a) Two samples of size 8 and 7, respectively, drawn from two independent normal populations, gave the following observations :

X	9	11	13	11	15	9	12	14
Y	10	12	10	14	9	8	10	-

Check whether the difference between the population means is significant at a 5% level of significance.

7

$$[\text{Given } t_{12, 0.05} = 2.179, \quad t_{13, 0.05} = 2.160, \\ t_{14, 0.05} = 2.145]$$

- (b) The area of a rectangle is 64 cm^2 . Find the dimensions of the rectangle if its perimeter is minimum.

3

6. (a) Solve the differential equation

$$\cos y \frac{dy}{dx} - \frac{\sin y}{1+x} = (1+x)e^x$$

4

- (b) The weights of a sample of five students were determined as 20, 20.6, 19.4, 18.8 and 21.2 kgs, respectively. Determine the sample standard deviation and the unbiased estimated population standard deviation. Also find the standard error of the sample mean.

6

7. State whether the following statements are *true* or *false*.
Give reasons for your answer.

10

- (i) If the vector $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ is perpendicular to $\lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, then $\lambda = -5$.
- (ii) The asymptote parallel to the coordinate axes of the curve $x^2(x - y) = xy^2 + 2y^2$ is $x = 0$.
- (iii) If X has Poisson distribution with parameter λ and $P(X = 1) = 2 P(X = 2)$, then $\lambda = 1$.
- (iv) Sample mean is the unbiased estimator of the population standard deviation.
- (v) If $f(x) = x - 1$ and $g(x) = x^2$ for $x \in \mathbf{R}$, then $f \circ g = g \circ f$.

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2007

गणित

एम.टी.ई.-3 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) औचित्य देते हुए, प्रत्येक ऐसे फलन का एक उदाहरण दीजिए, जो

(i) आच्छादी है, एकैकी नहीं है;

(ii) एकैकी आच्छादी है।

5

(ख) निम्नलिखित आँकड़े दिए रहने पर, मजदूरी का समांतर माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए :

3

मजदूरी (हजार रुपयों में)	व्यक्तियों की संख्या
6	3
7	6
8	9
9	13
10	8
11	5
12	4

(ग) $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $y = x^2 + \frac{1}{y}$ है ।

2

2. (क) यदि $u = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, तो दर्शाइए कि

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

4

(ख) यदि a और b समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल हैं, जहाँ $p, q \in \mathbf{R}$ है, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल a^2 और b^2 हैं ।

3

(ग) दो पासों को एक साथ फेंकने पर, दोनों पासों पर आए अंकों का योगफल कम-से-कम 8 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

3

3. (क) एक रोग नियंत्रण केन्द्र द्वारा यह निर्धारित किया गया है कि जब किसी व्यक्ति को एक टीका लगाया जाता है, तो उसमें एक वाइरस के प्रति रोधक्षमता विकसित होने की प्रायिकता 0.8 है। यदि 8 व्यक्तियों के यह टीका लगाया जाता है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) किसी व्यक्ति में रोधक्षमता विकसित नहीं होगी;

(ii) ठीक चार व्यक्तियों में रोधक्षमता विकसित होगी।

(ख) मान निकालिए :

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3 + 4 \sin x} dx$$

(ग) मूल बिन्दु से होकर जाने वाले उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ के

समांतर है तथा बिन्दु (0, 0, 1) से होकर जाता है।

4. (क) निम्नलिखित आँकड़े विपणन व्यय X (हजार रुपयों में) तथा संगत बिक्री Y (दस हजार रुपयों में) से सम्बन्धित हैं :

X	10	12	15	20	14
Y	14	15	20	25	10

विपणन व्यय और संगत बिक्री के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

- (ख) यदि a, b, c एक समांतर श्रेढ़ी (A.P.) में हैं तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a(b+c)}{bc}, \frac{b(c+a)}{ca}, \frac{c(a+b)}{ab}$ भी एक समांतर श्रेढ़ी (A.P.) में होंगे।

5. (क) दो स्वतंत्र प्रसामान्य समष्टियों में से क्रमशः 8 और 7 आकार वाले दो प्रतिदर्श लेने पर निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त हुए :

X	9	11	13	11	15	9	12	14
Y	10	12	10	14	9	8	10	-

जाँच कीजिए कि क्या समष्टियों के माध्यों के बीच का अंतर 5% सार्थकता के स्तर पर सार्थक है ।

7

[दिया गया है कि $t_{12, 0.05} = 2.179$,

$$t_{13, 0.05} = 2.160, \quad t_{14, 0.05} = 2.145]$$

- (ख) एक आयत का क्षेत्रफल 64 सेमी² है । यदि इस आयत का परिमाण न्यूनतम है, तो इसकी विमाएँ ज्ञात कीजिए ।

3

6. (क) अवकल समीकरण

$$\cos y \frac{dy}{dx} - \frac{\sin y}{1+x} = (1+x)e^x$$

को हल कीजिए ।

4

- (ख) पाँच विद्यार्थियों के एक प्रतिदर्श के भार क्रमशः 20, 20.6, 19.4, 18.8 और 21.2 किग्रा प्राप्त किए गए । इस प्रतिदर्श का मानक विचलन और समष्टि का अनभिन्नत आकलित मानक विचलन ज्ञात कीजिए । प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि भी ज्ञात कीजिए ।

6

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए।

10

- (i) यदि सदिश $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ सदिश $\lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ पर लम्ब है, तो $\lambda = -5$ है।
- (ii) वक्र $x^2(x - y) = xy^2 + 2y^2$ के निर्देशांक अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शी $x = 0$ है।
- (iii) यदि X , प्राचल λ वाला प्वासों बंटन है और $P(X = 1) = 2 P(X = 2)$ है, तो $\lambda = 1$ है।
- (iv) प्रतिदर्श माध्य समष्टि के मानक विचलन का अनभिन्नत आकलन होता है।
- (v) यदि $x \in \mathbf{R}$ के लिए, $f(x) = x - 1$ और $g(x) = x^2$ है, तो $f \circ g = g \circ f$ होता है।

